Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007
Etapa finală, Piteşti, 11 aprilie

CLASA A XII-A

Subiectul 1. a) Dacă $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, demonstraţi inegalitatea Cauchy

$$\left(\int_0^1 u(x)v(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 (u(x))^2\, dx\right)\left(\int_0^1 (v(x))^2\, dx\right).$$

b) Fie $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu derivata f' continuă pe $[0,1]$ şi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Determinaţi

$$\min_{f \in \mathcal{C}} \int_0^1 (1+x^2)^{1/2} (f'(x))^2\, dx$$

şi toate funcţiile $f \in \mathcal{C}$ pentru care este atins acest minimum.

Subiectul 2. Fie $f : [0,1] \to (0, \infty)$ o funcţie continuă pe $[0,1]$.

a) Arătaţi că pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$ există o unică diviziune, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, a intervalului $[0,1]$, astfel încât

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx, \quad k = 0, \cdots, n-1. \qquad (*)$$

b) Pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$, fie

$$\bar{a}_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

unde $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ este diviziunea unică cu proprietatea $(*)$. Arătaţi că şirul $(\bar{a}_n)_{n \geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Subiectul 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea: $x^{2^n+1} = 1$, oricare ar fi $x \in A \setminus \{0\}$.

Subiectul 4. Fie S_n grupul permutărilor mulţimii $\{1, \cdots, n\}$, $n \geq 3$, şi G un subgrup al său generat de $n-2$ transpoziţii. Arătaţi că pentru fiecare $i \in \{1, \cdots, n\}$ mulţimea $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ are cel mult $n-1$ elemente.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii